

Az egyenlő kerületű kör és ellipszis közelítő számítása

Az interneten találtunk egy érdekes grafikont – [1] –, amit most megkísérlünk magunk is megrajzolni.

Arról van szó, hogy rajzoljunk egy adott sugarú körrel *egyenlő kerületű* ellipsziseket.

Ehhez közelítő képletet használunk, most az egyik *Ramanudzsán* - félélet – [2] – :

$$C \cong \pi \cdot \left[3 \cdot (a + b) - \sqrt{(3 \cdot a + b) \cdot (a + 3 \cdot b)} \right], \quad (1)$$

ahol a, b az ellipszis féltengelyei.

Az r sugarú kör kerülete:

$$K = 2 \cdot \pi \cdot r. \quad (2)$$

(1) és (2) egyenlőségéből:

$$\begin{aligned} 2 \cdot \pi \cdot r &= \pi \cdot \left[3 \cdot (a + b) - \sqrt{(3 \cdot a + b) \cdot (a + 3 \cdot b)} \right] \rightarrow \\ 2 \cdot r &= 3 \cdot (a + b) - \sqrt{(3 \cdot a + b) \cdot (a + 3 \cdot b)} \rightarrow \\ \sqrt{(3 \cdot a + b) \cdot (a + 3 \cdot b)} &= 3 \cdot (a + b) - 2 \cdot r \rightarrow \\ (3 \cdot a + b) \cdot (a + 3 \cdot b) &= [3 \cdot (a + b) - 2 \cdot r]^2. \end{aligned} \quad (3)$$

Rendezés után az alábbi másodfokú egyenletre jutunk:

$$3 \cdot a^2 + 2 \cdot (2 \cdot b - 3 \cdot r) \cdot a + (3 \cdot b^2 - 6 \cdot r \cdot b + 2 \cdot r^2) = 0. \quad (4)$$

Ezt a megoldóképlettel megoldva:

$$\begin{aligned} a_{1,2} &= \frac{3 \cdot r - 2 \cdot b \pm \sqrt{(3 \cdot r - 2 \cdot b)^2 - 3 \cdot (3 \cdot b^2 - 6 \cdot r \cdot b + 2 \cdot r^2)}}{3} \rightarrow \\ a_{1,2} &= \frac{3 \cdot r - 2 \cdot b \pm \sqrt{3 \cdot r^2 + 6 \cdot r \cdot b - 5 \cdot b^2}}{3} > 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Most számértékkel folytatjuk:

$$r = 10 \text{ cm}. \quad (6)$$

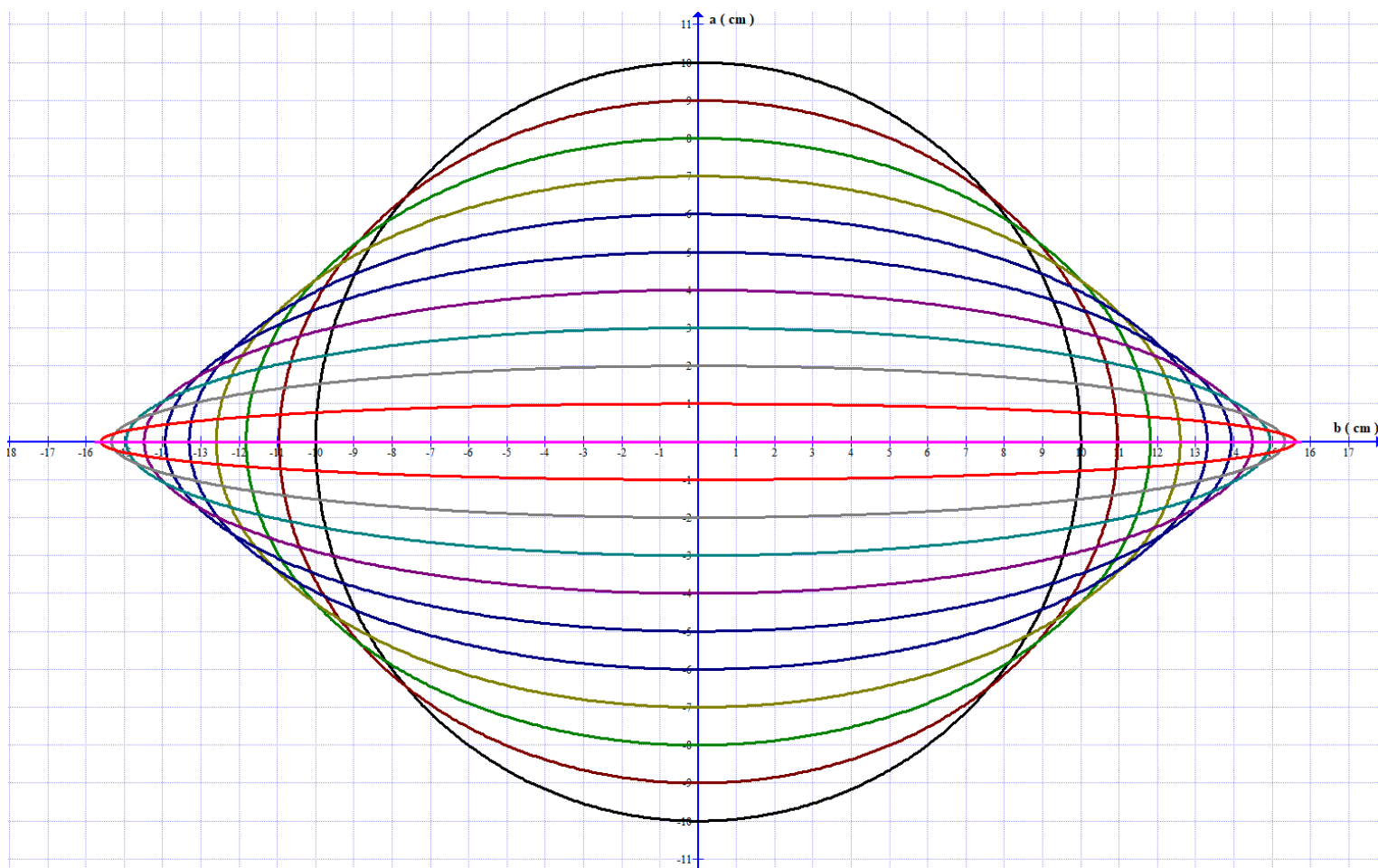
Mint hogy a - nak minden b - re pozitívnak kell lennie, így (6) - tal azt kaptuk az (5) függvények grafikus ábrázolása után, hogy csak a „+” előjel jöhet számításba:

$$\begin{aligned} a &= \frac{3 \cdot r - 2 \cdot b + \sqrt{3 \cdot r^2 + 6 \cdot r \cdot b - 5 \cdot b^2}}{3} = \frac{3 \cdot 10 - 2 \cdot b + \sqrt{3 \cdot 100 + 6 \cdot 10 \cdot b - 5 \cdot b^2}}{3} \rightarrow \\ a &= \frac{1}{3} \cdot (30 - 2 \cdot b + \sqrt{300 + 60 \cdot b - 5 \cdot b^2}), \\ a &\geq 10 \text{ (cm)}, \quad 0 \text{ (cm)} \leq b \leq 10 \text{ (cm)}. \end{aligned} \quad (7)$$

A (7) függvény szerintiek azok az $a(b)$ értékek, amelyek biztosítják a (6) sugarú körrel való (közel) egyenlő területet. Mi ennek csak egyes diszkrét értékeit vesszük figyelembe, az alábbi táblázat szerint.

1. táblázat

$b \text{ (cm)}$	$a \text{ (cm)}$	$a*b*\pi \text{ (cm}^2\text{)}$
10	10	314,159
9	10,952218	309,667
8	11,815870	296,965
7	12,598165	277,048
6	13,302967	250,755
5	13,931498	218,835
4	14,482537	181,993
3	14,952218	140,921
2	15,333333	96,342
1	15,613815	49,052
0	15,773503	0



1. ábra

A megfelelő ellipsziseket az 1. ábra mutatja. Ezzel elértük célunkat.

Megjegyzések:

M1. Az $a(b)$ felírás azt jelenti, hogy a függvénye b - nek. Biztos, ami biztos.

M2. Kiszámíthatjuk az 1. táblázat adatainak megfelelő ellipszisterületeket is. Ez megjele -
nik az 1. táblázat 3. oszlopában.

M3. Sokkal egyszerűbb a területek egyenlőségének a követelményét kielégíteni:

$$r^2 \cdot \pi = a \cdot b \cdot \pi \rightarrow r^2 = a \cdot b \rightarrow \underline{a = \frac{r^2}{b}} . \quad (8)$$

Ez azt mondja, hogy területegyenlőség esetén az ellipszis fél nagytengelye fordítottan arányos a fél kistengellyel, ahol az arányossági tényező a kör sugarának a négyzete.

M4. Azon ellipszis területe, melynek kerülete $K = 2 \cdot r \cdot \pi$, általában, közelítőleg:

$$\underline{T_K \cong \frac{\pi}{3} \cdot b \cdot (3 \cdot r - 2 \cdot b + \sqrt{3 \cdot r^2 + 6 \cdot r \cdot b - 5 \cdot b^2})} . \quad (9)$$

A (9) képlet csak annyira pontos, mint (1) .

Források:

[1] – https://en.wikipedia.org/wiki/Ellipse#/media/File:Ellipses_same_circumference.png

[2] – <https://en.wikipedia.org/wiki/Ellipse>

Összeállította: **Galgóczi Gyula**
ny. mérnöktanár

Sződliget, 2024. 09. 19.

Továbbiak: www.galgoczi.net